(1) (i) $f(0)=\int_0^1 \left|\sqrt{1-x^2}-0\right| dx$

$=\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$

$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$ は、半径1の円の面積の

$\frac{1}{4}$を表すので、 $f(0)=\frac{\pi}{4}$ //

$f(\frac{\pi}{2})=\int_0^1 \left|\sqrt{1-x^2}-1\right| dx$

$0\leqq x\leqq 1$において、

$0\leqq \sqrt{1-x^2}\leqq 1$ であるから

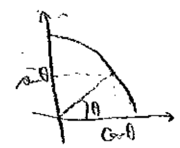
$f(\frac{\pi}{2})=\int_0^1 -(\sqrt{1-x^2}-1)\, dx$

$=\int_0^1 -\sqrt{1-x^2}\, dx+[x]_0^1$

$=1-\frac{\pi}{4}$ //

(ii) $\sqrt{1-x^2}=\sin\theta$ となる xの値は、

$x=\cos\theta$.



$0\leqq x\leqq \cos\theta$において

$\sqrt{1-x^2}\geqq \sin\theta$

$\cos\theta\leqq x\leqq 1$において

$\sqrt{1-x^2}\leqq \sin\theta$

ゆえに、

$f(\theta)=\int_0^{\cos\theta}(\sqrt{1-x^2}-\sin\theta)d\theta+\int_{\cos\theta}^1 -(\sqrt{1-x^2}-\sin\theta)d\theta$

$=\int_0^{\cos\theta}\sqrt{1-x^2}\,d\theta-\int_{\cos\theta}^1\sqrt{1-x^2}\,d\theta$

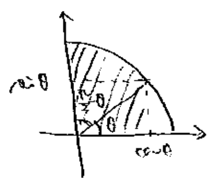
$-\sin\theta\,[\theta]_0^{\cos\theta}+\sin\theta\,[\theta]_{\cos\theta}^1$

$=\int_0^{\cos\theta}\sqrt{1-x^2}\,d\theta-\int_{\cos\theta}^1\sqrt{1-x^2}\,d\theta-\sin2\theta+\sin\theta$

ここで、$\int_0^{\cos\theta}\sqrt{1-x^2}\,d\theta$ は

右図の斜線部の面積を

表すので、



$\int_0^{\cos\theta}\sqrt{1-x^2}\,d\theta$

$=\frac{1}{2}\sin\theta\cdot\cos\theta+\frac{1}{2}\cdot1^2(\frac{\pi}{2}-\theta)$

$=\frac{1}{4}\sin2\theta+\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$

$\int_{\cos\theta}^1\sqrt{1-x^2}\,d\theta$ は、四分円から斜線部を

ひいた面積になるので、

$\int_{\cos\theta}^1\sqrt{1-x^2}\,d\theta$

$=\frac{\pi}{4}-(\frac{1}{4}\sin2\theta+\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})=-\frac{1}{4}\sin2\theta+\frac{\theta}{2}$

以上より、

$f(\theta)=\frac{1}{4}\sin2\theta+\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}-(-\frac{1}{4}\sin2\theta+\frac{\theta}{2})$

$-\sin2\theta+\sin\theta$

$=-\frac{1}{2}\sin2\theta+\sin\theta-\theta+\frac{\pi}{4}$ //

(iii) $f'(\theta)=-\cos2\theta+\cos\theta-1$

$=-2\cos^2\theta+\cos\theta$ //

(iv) (iii)より、

$f'(\theta)=-2\cos\theta(\cos\theta-\frac{1}{2})$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$で、$f'(\theta)=0$となるのは

$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}$

よって増減表は以下のようになる

θ	0	…	$\frac{\pi}{3}$	…	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		−	0	+	0
$f(\theta)$	$\frac{\pi}{4}$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{12}$	↗	$1-\frac{\pi}{4}$

以上より、最大値 $\frac{\pi}{4}$ ($\theta=0$のとき)

最小値 $\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{12}$ ($\theta=\frac{\pi}{3}$のとき)

(v) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\frac{1}{2}\sin2\theta+\sin\theta-\theta+\frac{\pi}{4})\,d\theta$

$=\left[\frac{1}{4}\cos2\theta-\cos\theta-\frac{1}{2}\theta^2+\frac{\pi}{4}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=-\frac{1}{4}-\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{4}+1$

$=\frac{1}{2}$ //